Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 5

1 – Uma folha fina de metal tem a forma da superfície $z = f(x, y) = 1 + x + 2y$ com $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2$ ou seja sobre a isosuperfície do campo escalar $\Psi(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Se a densidade areolar (kg/m^2) for $\rho(x, y, z) = x^2yz$, calcule a massa da folha. Use a fórmula dos integrais de superfície de $\rho(x, y, z)$ sobre isosuperfícies: $\iint \rho(x, y, f(x, y))\|\nabla\Psi\|\, dxdy$. Resposta:$\frac{2560\sqrt{6}}{9}$.

2 – Calcule o fluxo de massa em (kg/s) através da superfície $0 \le y \le 1, 0 \le z \le \infty, x = 0$ no sentido de x crescente, associado ao campo de velocidades horizontal $\vec{v}_H = U\overrightarrow{e_x} =$ (ou vento horizontal $\vec{v}_H$) e campo de densidades $\rho(x, y, z) = \rho_0 e^{-Cz}$ onde $U > 0, \rho_0 > 0$ e $C > 0$ são constantes. Esse campo de densidade na vertical (ou perfil da densidade) decresce exponencialmente em altitude z sendo uma boa aproximação da variação da densidade na atmosfera. A densidade de fluxo de massa é o produto $\vec{F} = \rho\vec{v}_H$ tendo de calcular o fluxo desse vetor $\vec{F}$ através da referida superfície no sentido de x crescente. Discuta e calcule o fluxo no caso em que o vento horizontal faz um ângulo α com a normal à superfície.

3 – Um cilindro de metal condutor de calor é definido pelas equações: $x^2 + y^2 \le 1; 1 \le z \le 4$. Admita o campo escalar de temperatura $\mathrm{T}(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$. O campo vetorial da densidade de fluxo de calor (W/m^2) pelo processo de difusão térmica é $\vec{F}(x, y, z) = -k\nabla\mathrm{T}$ onde $k = 55\frac{W}{Km} > 0$ é a condutibilide térmica neste caso particular. A densidade de fluxo de calor aponta no sentido contrário ao do gradiente de temperatura ou seja no sentido da máxima variação negativa da temperatura. Diz-se que um material é bom ou mau condutor de calor conforme k seja elevado (e.g. metais) ou baixo (e.g. cortiça, esferovite, ar). Calcule o fluxo exportador de calor (ou seja para fora do cilindro) nas três faces do cilindro: inferior (Sinf) superior (Ssup) e lateral (Slat). Resposta: $55\frac{\pi}{2}, -55\frac{\pi}{2}, -1650\pi\ W$respetivamente. Sugestão: Use coordenadas cilíndricas $\rho, \theta, z,$ para parametrizar as superfícies.

Verifique que o teorema do fluxo-divergência se verifique calculando o integral de volume de $div\vec{F}$. O teorema do fluxo-divergência ou teorema de Gauss da divergência afirma que o fluxo Φ para o exterior (ou exportador) de uma superfície S fechada de um campo vetorial $\vec{F}$ iguala o integral de volume da divergência de $\vec{F}$ (ou seja $div(\vec{F})$) ao longo do volume V no interior da superfície S (localmente, o interior situa-se sempre no sentido contrário do versor normal $\vec{n}$ exterior à suoerfície. Assim o teorema escreve-se:

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V div(\vec{F}) dV$$

Se a superfície S for descrita parametricamente por $\vec{r}(u, v)$ então o elemento infinitesimal do vetor área é $\vec{n}\, dS = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\| du\, dv$, equanto o elemento infinitesimal de volume é dV.

4- Calcule a circulação Γ do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (xy, x^2 + y^2 + z^2, yz)$ ao longo da linha fronteira do paralelogramo de vértices P_1=(0,0,1), P_2=(2,0,-1), P_3=(2,1,-2) e P_4=(0,1,0), e no sentido P_1 P_2 $P_3 P_4$. Para tal use o teorema de Stokes para calcular essa circulação Γ. Sugestão: Comece por parametrizar a superfície plana que une os vértices do paralelogramo (verifique desde já que é uma superfície plana). O teorema de Stokes afirma que a circulação Γ de um campo $\vec{F}$ (ou seja o integral de linha cíclico) ao longo de uma curva fechada C iguala o fluxo do campo vetorial do rotacional de $\vec{F}$ ($rot\,\vec{F}$) através de qualquer superfície S cujo bordo seja C. Em termos da expressão matemática, escreve-se:

$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{t}\, dl = \iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ onde $\vec{t}$ é o versor tangente à curva e $dl = \|d\vec{r}\|$ é o elemento infinitesimal de arco, $\vec{n}$ é o versor normal à superfície, dS é o elemento infinitesimal de superfície.

A curva C é parametrizada por $\vec{r}(t)$ e $\vec{t}\, dl = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt = d\vec{r}$. A superfície S é parametrizada por $\vec{r}(t) = \vec{r}(t, u)$ e $\vec{n}\, dS = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} dt\, du$, onde u é um parâmetro que cresce positivamente para dentro da superfície como mostra a figura anexa.